ÜBER

# TRAJECTORIEN

ZU DEN

# TANGENTEN EBENER CURVEN.

---

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

IN GÖTTINGEN

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

VON

**HERMANN HERWIG**

AUS MÜNSTER.

---

GÖTTINGEN,

DRUCK DER UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON E. A. HUTH.

1867.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544702_0091

§. 1. Zu den bekanntesten Aufgaben der analytischen Geometrie gehören die der Ableitung der Evoluten und der Evolventen. Fasst man die charakteristische Eigenschaft dieser Curven ins Auge, dass nämlich die Evolute die Normalen einer angenommenen Curve (der Evolvente) berührt, und dass die Evolvente die Tangenten einer angenommenen Curve (der Evolute) unter einem rechten Winkel schneidet, so zeigen sich beide Aufgaben einer Verallgemeinerung fähig, indem man einen beliebigen Winkel an die Stelle des rechten treten lässt. Für die Evoluten findet sich dieser Gedanke in mehreren Schriften ausgearbeitet; die so gewonnenen Curven sind unter dem Namen Evolutoiden bekannt. Die Verallgemeinerung der Evolvente, welche vielleicht kaum ein geringeres Interesse bietet, scheint nicht die gleiche Berücksichtigung gefunden zu haben. Im Folgenden soll sie kurz durchgeführt werden, jedoch mit der Beschränkung, nur solche Curven zu finden, welche die Tangenten angenommener ebener Curven unter einem zwischen 0 und 90° liegenden Winkel schneiden.

§. 2. Es sei $\eta = \varphi\xi$ die Gleichung der ursprünglichen Curve, $y$, $x$ die Coordinaten der gesuchten Curve, welche die Tangenten der ursprünglichen unter einem zwischen 0 und 90° liegenden Winkel $\lambda$ schneidet, endlich sei $n$ die Tangente von $\lambda$. Für die positive Grösse $n$ hat man den Ausdruck

$$n = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{d\eta}{d\xi}}{1 + \frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{d\xi}},$$ wobei nicht unerwähnt gelassen werden darf,

dass die hier gewählte Anordnung der Grössen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$ im Folgenden festgehalten werden soll und daher wohl zu berücksichtigen ist. Ferner ist für eine Tangente der Curve $\eta\xi$ $\alpha - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(\beta - \xi)$, wenn $\alpha\beta$ die laufenden Coordinaten vorstellen. Diejenigen Punkte dieser Tangenten, welche der obigen Bedingungsgleichung genügen, bilden in ihrer Continuität die Curve $yx$.

Setzt man deshalb in der Gleichung der Tangente $y,x$ an die Stelle von $\alpha$, $\beta$ und fügt die dadurch erhaltene Gleichung zu der Bedingungsgleichung für $n$, so ist hiermit die Curve $yx$ bestimmt. Die umgestaltete Tangente lautet $y - \varphi\xi = \varphi'\xi\,(x - \xi)$, wo mit $\varphi'\xi$ der erste Differentialquotient ausgedrückt ist. Sucht man hieraus $\frac{dy}{dx}$ zu gewinnen, um diesen Ausdruck alsdann in die Gleichung für $n$ einzusetzen, so ist zu beachten, dass $\xi$ eine Function von $x$ ist, daher $\frac{dy}{dx} = \varphi'\xi + [\varphi'\xi + \varphi''\xi\,(x-\xi) - \varphi'\xi]\,\frac{d\xi}{dx}$, wo durch $\varphi''\xi$ der zweite Differentialquotient bezeichnet ist. Die Substitution in die Gleichung für $n$, welche sich auch folgendermassen schreiben lässt $(n\varphi'\xi - 1)\,\frac{dy}{dx} + \varphi'\xi + n = 0$, ergibt

$$(n\,\varphi'\xi - 1)\,\varphi''\xi\,(x-\xi)\,\frac{d\xi}{dx} + n\,(1+\varphi'\xi^2) = 0$$

Die Elimination von $\xi$ aus dieser Gleichung und aus $y - \varphi\xi = \varphi'\xi\,(x-\xi)$ liefert die gesuchte Beziehung zwischen $y$ u. $x$.

Es bedarf hierzu zunächst einer Integration der ersteren Gleichung.

Setzt man dort $\frac{n(1+\varphi'\xi^2)}{(n\varphi'\xi - 1)\,\varphi''\xi} = f\xi$, so lautet die Gleichung $\frac{d\xi}{dx}(x-\xi) + f\xi = 0$ Nun ist

$$\frac{1}{f\xi}\left(\frac{df\xi}{d\xi} - \frac{d(x-\xi)}{dx}\right) = \frac{1}{f\xi}\left(\frac{df\xi}{d\xi} - 1\right)$$ unabhängig von $x$, also

bekanntlich $v = C\,.\,e^{-\int \frac{1}{fx}\left(\frac{df\xi}{dx} - 1\right)}$ $d\xi$ ein integrirender Factor der vorliegenden Differentialgleichung.

Es ist $\frac{1}{f\xi}\left(\frac{df\xi}{d\xi} - 1\right) =$

$$= \frac{[2\,(\varphi''\xi)^2\,\varphi'\xi\,(n\,\varphi'\xi - 1) - (1+\varphi'\xi^2)\,\{\varphi'''\xi\,(n\,\varphi'\xi - 1) + n\,\varphi''\xi^2\} - \frac{1}{n}\,\varphi''\xi^{\,2}\,(n\,\varphi'\xi - 1)^2]}{(1+\varphi'\xi^2)\,\varphi''\xi\,(n\,\varphi'\xi - 1)} =$$

$$= -\frac{\varphi'''\xi}{\varphi''\xi} - \frac{(n+\frac{1}{n})\,\varphi''\xi}{(n\varphi'\xi - 1)\,(1+\varphi'\xi^2)}\,,$$

wo $\varphi'''\xi$ den dritten Differentialquotienten bezeichnet. Also

$$-\int \frac{1}{f\xi}\left(\frac{df\xi}{d\xi}-1\right) d\xi = \log(\varphi'''\xi) + \log\left(\varphi'\xi - \frac{1}{n}\right)$$

$$- \left\{\frac{1}{n}\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \varphi'\xi) + {}^1/_2 \log(1+\varphi'\xi^2)\right\},$$

daher $v = C \cdot \dfrac{\varphi''\xi\left(\varphi'\xi - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\varphi'\xi^2}} \, e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi}$

Mit diesem Factor multiplicirt wird die obige Differentialgleichung zu

$$\frac{d\xi}{dx}(x-\xi)\frac{\varphi''\xi\left(\varphi'\xi - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\varphi'\xi^2}} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi} +$$

$$+ \sqrt{1+\varphi'\xi^2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi} = 0$$

Die Integration ergibt also

$$(x-\xi\sqrt{})\sqrt{1+\varphi'\xi^2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi} + \int \sqrt{1+\varphi'\xi^2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi} d\xi = \text{const.}$$

Da die Integrationsconstante jedoch recht wohl eine Function von $n$ sein kann, so soll sie mit $Fn$ bezeichnet werden, so dass nunmehr die Elimination von $\xi$ aus den folgenden beiden Gleichungen die Curve $yx$ liefert:

$$(x-\xi)\sqrt{1+\varphi'\xi^2}\, e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi} + \int \sqrt{1+\varphi'\xi^2}\, e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi} d\xi = Fn$$

und $y - \varphi\xi = \varphi'\xi\,(x-\xi)$.

§. 3. Die folgende Untersuchung wird nun eine doppelte. Offenbar kann nicht für jede angenommene Function $\varphi\xi$ das oben vorkommende Integral

$$\int \sqrt{1+\varphi'\xi^2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg} = \varphi'\xi} d\xi$$

aufgelöst werden. Es handelt sich also einerseits darum, solche Curven $\varphi\xi$ aufzufinden, welche eine Lösung des vorstehenden Integrals zulassen, andrerseits darum, aus den beiden Schlussgleichungen des vorigen Paragraphen, nachdem dort für eine bestimmte $\eta\xi$ Curve das Integral aufgelöst worden ist, durch Elimination von $\xi$ die $yx$ Curve zu berechnen.

Durch folgende Methode wird man mehrere Curven, die das in Rede stehende Integral lösbar machen, gewinnen.

Setzt man $\operatorname{arctg} \varphi'\xi = z$, also $\sqrt{1+\varphi'\xi^2} = \pm \frac{1}{\cos z}$,

so lautet das umgeformte Integral $\int \frac{e^{-\frac{z}{n}}}{\pm \cos z} \frac{d\xi}{dz} dz$. Gibt man nun dem $\frac{d\xi}{dz}$ Werthe, die das Integral lösbar machen, so bleibt nur zu untersuchen, welche Functionen $\varphi\xi$ durch diese Substitution vorausgesetzt werden. Zunächst soll die einfachste Substitution $\frac{d\xi}{dz} = \pm \cos z$ der Untersuchung unterzogen werden.

Man hat allgemein $\operatorname{tg} z = \varphi'\xi$, also differentiirt

$$\frac{1}{\cos^2 z} = \varphi''\xi \frac{d\xi}{dz}, \qquad \varphi''\xi = \frac{1}{\cos^2 z \cdot \frac{d\xi}{dz}}$$

Für $\frac{d\xi}{dz} = \pm \cos z$ wird das $\varphi''\xi = \pm \frac{1}{\cos z^3} = \pm (1+\varphi'\xi^2)^{3/2}$

Um aus dieser Gleichung die Function $\varphi\xi$ kennen zu lernen, beachte man folgenden allgemeinen Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen.

Bezeichnet man in $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = f\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) \frac{d\eta}{d\xi}$ mit $u$, so ergibt sich das Integral der aufgestellten Differentialgleichung durch Elimination von $u$ aus $\eta = \int \frac{u\, du}{fu} + c$ und $\xi = \int \frac{du}{fu} + c_1$,

wo $c$ und $c_1$ Constante sind.

Dieses auf den vorliegenden Fall angewandt gibt

$$\eta = c \pm \int \frac{u\, du}{(1+u^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad \xi = c_1 \pm \int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}}$$

oder $\eta = c \mp \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ und $\xi = c_1 \pm \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

$$u = \frac{\xi - c_1}{c - \eta} \qquad (c-\eta)^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\xi-c_1}{c-\eta}\right)^2}$$

$(c-\eta)^2 + (\xi - c_1)^2 = 1$ die Gleichung eines Kreises.

Die Substitution $\frac{d\xi}{dz} = \pm \cos z$ macht das obige Integral zu

$$\int e^{-\frac{z}{n}} dz = -n\, e^{-\frac{z}{n}}$$

Somit hat man für die Trajectorien, welche die Kreistangenten unter einem Winkel $\lambda$, dessen trigonometrische Tangente $n$ ist, schneiden, das System von Gleichungen:

$$\left(\frac{x-\xi}{\mp\cos z} - n\right) e^{-\frac{z}{n}} = Fn$$

und $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x-\xi)$

wobei $z = \left(\text{arctg} = \frac{d\eta}{d\xi}\right)$ ist.

§. 4. Ueber das doppelte Vorzeichen des Cosinus gilt folgende Bemerkung.

Durch die obige Transformation $\sqrt{1+\varphi'\xi^2} = \mp \frac{1}{\cos z}$ ist zugleich die Doppelwerthigkeit der Wurzel $\sqrt{1+\varphi'\xi^2}$ gefordert, was auch nicht gegen die obige allgemeine Integralgleichung verstösst, wenn nur der Wurzel unter dem Integrale und in dem freien Gliede dasselbe Zeichen beigelegt wird. Setzt man nun für den vorliegenden Fall in der Kreisgleichung $(c-\eta)^2 + (\xi - c_1)^2 = 1$ $c = c_1 = 0$, welche Annahme überhaupt künftig gemacht werden soll, so ist dadurch der Coordinatenanfang in das Kreiscentrum verlegt, während der Kreisradius die Längeneinheit bildet. Alsdann hat man $\eta = \mp\sqrt{1-\xi^2}$ $\frac{d\eta}{d\xi} = \mp\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, folglich

$$\frac{d}{d\xi}\left(-n\,e^{-\frac{z}{n}}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(-n\,e^{-\frac{1}{n}\text{arctg} = \mp\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) =$$

$$= \mp\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\frac{1}{n}\text{arctg} = \mp\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Andererseits ist jetzt

$$\int \sqrt{1+\varphi'\xi^2}\,.\,e^{-\frac{1}{n}\text{arctg} = \varphi'\xi}\, d\xi = \int \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\frac{1}{n}\text{arctg} = \mp\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\, d\xi$$

Daraus ist ersichtlich, dass für das obere Zeichen in $\left(\text{arctg} = \mp\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ auch $\sqrt{1+\varphi'\xi^2}$ negativ zu nehmen ist,

hingegen für das untere positiv, so dass man jetzt mit correspondirenden doppelten Zeichen hat

$$\left(\mp\frac{x-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - n\right) e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}} = \mp\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = Fn$$

Will man die Variable $z$ wieder einführen, so ist nach dieser Feststellung über die Wurzel $\sqrt{1+\varphi'\xi^2}$ einfach zu schreiben

$$\left(\frac{x-\xi}{\cos z} - n\right) e^{-\frac{z}{n}} = Fn$$

§. 5. Um über den Verlauf des Bogens $z = \left(\operatorname{arctg} = \frac{d\eta}{d\xi}\right)$ Kenntniss zu erhalten, dient die Betrachtung der Function $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \mp\frac{1}{(1-\xi^2)^{3/2}}$, die für positive $\eta$ stets negativ, für negative $\eta$ stets positiv ist. Demnach sind folgende 2 Annahmen möglich:

1) Für die Tangente im Punkte $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = 1\end{cases}$ gilt der Bogen $-\frac{\pi}{2}$,

für den Punkt $\begin{cases}\eta = 1\\ \xi = o\end{cases}$ gilt $o$,

für den Punkt $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = -1\end{cases}$ gilt $\frac{\pi}{2}$.

Während dieses auf der Seite der positiven $\eta$ stattfindet, gilt auf der Seite der negativen $\eta$

$\frac{\pi}{2}$ für den Punkt $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = -1\end{cases}$

$\pi$ für den Punkt $\begin{cases}\eta = -1\\ \xi = o\end{cases}$

$\frac{3\pi}{2}$ für den Punkt $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = 1\end{cases}$

Die zwischenliegenden Werthe verstehen sich von selbst. Natürlich ist auch eine Vermehrung oder Verminderung sämmtlicher Werthe um Vielfache von $2\pi$ gestattet.

2) Auf Seiten der positiven $\eta$ ist

$\frac{\pi}{2}$ für den Punkt $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = 1\end{cases}$, $\pi$ für $\begin{cases}\eta = 1\\ \xi = o\end{cases}$, $3\pi$ für $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = -1\end{cases}$

während auf Seiten der negativen $\eta$ gilt

$-\frac{\pi}{2}$ für $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = -1\end{cases}$, $o$ für $\begin{cases}\eta = -1\\ \xi = o\end{cases}$, $\frac{\pi}{2}$ für $\begin{cases}\eta = o\\ \xi = 1\end{cases}$. Im Uebrigen gelten die unter der vorigen Annahme gemachten Bemerkungen.

Bezeichnet man die Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $o$ mit I., die von $o$ bis $\frac{\pi}{2}$ mit II., die von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi$ mit III. und die von $\pi$ bis $\frac{3\pi}{2}$ mit IV., so ist unter der ersten Annahme zu setzen

für I. $z = \left(\text{arctg} = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ $\cos z = +\sqrt{1-\xi^2}$

II. $z = \left(\text{arctg} = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ $\cos z = +\sqrt{1-\xi^2}$

III. . . . . $+$ . . . . . $-$ . .

IV. . . . . $+$ . . . . . $-$ . .

Unter der zweiten Annahme ist zu setzen

für I. $z = \left(\text{arctg} = +\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ $\cos z = +\sqrt{1-\xi^2}$

II. . . . . $+$ . . . . . $+$ . .

III. . . . . $-$ . . . . . $-$ . .

IV. . . . . $-$ . . . . . $-$ . .

Dem Früheren zufolge gilt also gegenwärtig die zweite Annahme.

§. 6. Soll die Gleichung der hier betrachteten Trajectorien in Form einer Gleichung, die nur die Coordinaten $y$ und $x$ enthält, dargestellt werden, so ist aus dem oben angeführten Systeme zweier Gleichungen $\xi$ zu eliminiren. Zu diesem Zwecke ergibt sich aus $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$ der Werth $\xi = \frac{x \pm y\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{x^2 + y^2}$

Es darf jedoch nur der Werth mit dem positiven Wurzelzeichen verwandt werden, wie sich leicht zeigen lässt. Bezeichnet man die Richtung der zunehmenden Bogen $z$, also von der positiven $\xi$axe zur positiven $\eta$axe hin, mit links, die entgegengesetzte mit rechts, so kann man auch, vom Berührungspunkte einer Kreistangente mit dem Kreise aus gerechnet, einen linken und rechten Theil der Tangente unterscheiden. Die Anordnung der Grössen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d\eta}{d\xi}$, welche in der im Anfange aufgestellten Be-

dingungsgleichung für $n$ getroffen wurde, hat nun zur Folge, dass die Trajectorien den linken Theil einer jeden Tangente unter dem Winkel $\lambda$ schneiden. Führt man dem angemessen durch die Transformation $x = t \sin \Theta$ und $y = t \cos \Theta$ Polarcoordinaten ein, wodurch also der $\sphericalangle \Theta$ zunimmt mit abnehmendem Bogen $z$, so wird aus obigem Ausdrucke $\xi = \frac{\sin \Theta}{t} \pm \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \cdot \cos \Theta$.

Ist nun $(\Theta + \gamma)$ der zu dem Kreispunkte $\eta\xi$ gehörige Polarwinkel, von welchem Punkte aus eine gezogene Kreistangente die Trajectorie im Punkte $yx$ unter dem Winkel $\lambda$ schneidet, so ist $(\Theta+\gamma) > \Theta$. Folglich hat man $\xi = \sin(\Theta+\gamma) = \sin\Theta \cos\gamma + \cos\Theta \sin\gamma = \frac{\sin\Theta}{t} + \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \cos\Theta$, womit die obige Behauptung bewiesen ist. Der negative Wurzelwerth in dem Ausdrucke für $\xi$ gehört dem zweiten Schneidepunkte an, worin der rechte Theil der Kreistangente von der Trajectorie, aber im Allgemeinen nicht unter dem Winkel $\lambda$, geschnitten wird.

Den so bestimmten Werth von $\xi$ kann man in die andere Gleichung des erwähnten Systems substituirt denken und hat dann die Trajectorien repräsentirt durch die einzige Gleichung

$$\left(\pm \frac{x-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - n\right) e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg} = \mp \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = Fn$$

§. 7. Für den Durchschnittspunkt einer Trajectorie mit dem Kreise hat man

$$-n\, e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg} = \mp \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = Fn,$$

wenn $\xi$ die Abscisse des Durchschnittspunktes vorstellt. Daraus

$$\left(\operatorname{arctg} = \mp \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = n \log \left(\frac{n}{-Fn}\right)$$

Hieran zeigt sich, dass nur bei negativem $Fn$ ein Durchschnittspunkt möglich ist.

Wenn man in der in der Form

$$x = \xi + \cos z \cdot \left(n + Fn \cdot e^{\frac{z}{n}}\right)$$

geschriebenen Trajectoriengleichung dem $Fn$ einen negativen Werth beigelegt denkt, so sieht man, dass die Trajectorien, welche den

Kreis selbst schneiden, sich mit abnehmendem Bogen $z$ weiter vom Kreise entfernen, sowie überhaupt ihr ungefährer Verlauf leicht zu erkennen ist.

Setzt man speciell $Fn = -ne$, so ist für den genannten Durchschnittspunkt $\left(\text{arctg} = \mp \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = -n$. Werden jetzt dem $n$ alle möglichen Werthe zwischen Null und Unendlich beigebeigelegt (beide Grenzen jedoch ausgenommen, da für sie die bisherigen Formeln nicht entwickelt sind), so ist dadurch eine Reihe von Trajectorien charakterisirt, deren Schneidepunkte mit dem Kreise von dem Punkte $\begin{cases}\eta = -1\\ \xi = 0\end{cases}$ an in der Richtung auf die negative $\xi$axe zu den Kreis umlaufen und zwar so, dass der früher mit $z$ bezeichnete Bogen gleich der negativen Tangente des jeder Trajectorie zugehörigen Schneidewinkels $\lambda$ ist. Es fragt sich, ob diese Trajectorien eine einhüllende Curve besitzen. Differentiirt man dieserhalb die Gleichung der vorliegenden Trajectorien in der Form $\left(\frac{x-\xi}{\cos z} = n\right) e^{-\frac{z}{n}} = -ne$ nach $n$, so findet sich

$$-e^{-\frac{z}{n}} + \left(\frac{x-\xi}{\cos z} - n\right)\frac{z}{n^2} \cdot e^{-\frac{z}{n}} = -e.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erfolgt

$$e^{-\frac{z}{n}} = \frac{-ne}{\frac{x-\xi}{\cos z} - n}$$

Dieser Werth in die zweite Gleichung substituirt gibt

$$n = \frac{\frac{x-\xi}{\cos z} \cdot z}{z + \frac{x-\xi}{\cos z}}$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks wird aus der ersten Gleichung

$$e^{-\frac{z \cdot \cos z}{y-\xi} - 2} = -\frac{z \cdot \cos z}{x-\xi}$$

Wenn diese Gleichung wirklich die einhüllende Curve der Trajectorien bezeichnen soll, so ist es nach der allgemeinen Regel

erforderlich, durch Elimination einer der Coordinaten $xy$ aus den beiden vorigen Gleichungen $n$ als eine Function der andern Coordinate darzustellen. Im vorliegenden Falle genügt es, $n$ als Function von $z$ nachzuweisen. Man hat zu diesem Zwecke aus der ersten der beiden obigen Gleichungen

$$\frac{x-\xi}{\cos z} = n\left(1 - e^{\frac{z}{n}} + 1\right).$$

welcher Ausdruck in den Werth für $n$ eingesetzt ergibt

$$e^{\frac{n-z}{n} - 2} = \frac{n-z}{n},$$

wonach also wirklich eine einhüllende Curve vorhanden ist.

Setzt man in der Gleichung derselben $-\frac{z \cdot \cos z}{x-\xi} = p$, so lautet die Gleichung $\frac{e}{p}^{p-2} = 1$. Nun ist $\frac{d\left(\frac{e}{p}\right)^{p-2}}{dp} = \frac{p-1}{p^2} e^{p-2}$, welcher Ausdruck nur für $p = 0$ und für $p = 1$ unendlich, resp. Null wird. Daraus ersieht man, dass es nur 2 Werthe von $p$ gibt, welche die differentiirte Grösse zu 1 machen. Der eine dieser Werthe ist grösser als 1, der andere liegt zwischen 0 und 1; negativ kann $p$ natürlich nicht sein. Annähernd lauten die Werthe $p = 3{,}1462$ und $p = 0{,}1586$, Jedoch darf im gegenwärtigen Falle nur der erste Werth benutzt werden. Aus dem obigen Ausdrucke für $n$ ergibt sich nämlich $-\frac{z \cdot \cos z}{x-\xi} = -\frac{z}{n} + 1$, welcher Werth stets grösser ist als 1, da der Bogen $z$ nur negative Werthe durchläuft. Zur Berechnung der einhüllenden Curve dient also die Gleichung

$$-\frac{z \cdot \cos z}{x-\xi} = 3{,}1462.$$

Anstatt hier die früher angegebenen Werthe für $\xi$ und $z$ zu substituiren, kann man auch einfach für einen Punkt des Kreises die Grössen $\xi$, $z$ und $\cos z$ berechnen und daraus mit Hülfe der vorliegenden Gleichung $x$ ableiten. Das zugehörige $y$ wird durch die Kreistangente des angenommenen Punktes abgeschnitten, wodurch sein Werth sofort bestimmt ist.

§. 8. Während vorhin die Durchschnittspunkte der Trajectorien mit dem Kreise unzählige Male die Kreisperipherie umliefen und damit im Zusammenhange auch die einhüllende Curve der Trajectorien unendlich viele schneckenförmige Züge um den Kreis beschrieb, lässt sich auch eine andere Anordnung treffen, wonach nur ein begrenztes Stück der Kreisperipherie von den Trajectorien geschnitten wird.

Soll z. B. das Stück, für welches im §. 5. dem Bogen $z$ Werthe von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$ beigelegt wurden, von den Trajectorien in stetiger Aufeinanderfolge geschnitten werden, so hat man dem im Anfange des §. 7. Gesagten gemäss $Fn$ so zu wählen, dass $n \log\left(\frac{n}{-Fn}\right) = \frac{\pi}{2} Gn$ sei, wo $Gn$ von $n = 0$ bis $n = \infty$ die Werthe von 0 bis $-1$ stetig durchläuft. Eine derartige Function ist $Gn = n \log \frac{n}{1+n}$.

Man hat nämlich $\frac{d\,Gn}{dn} = \log \frac{n}{1+n} + \frac{1}{1+n}$, welcher Ausdruck für $n = 0$ den Werth $-\infty$ und für $n = \infty$ den Werth 0 hat.

Die Function $\frac{d^2 G}{d^2 n} = \frac{1}{n(1+n)^2}$ zeigt, dass $\frac{d\,G}{d\,n}$ von $n = 0$ bis $n = \infty$ stetig wächst. Innerhalb dieser Grenzen hat man also $Gn$ stetig ohne Maximum oder Minimum, während an den Grenzen selbst die gewünschten Werthe stattfinden, $Gn = 0$ für $n = 0$, indem hierfür $n \log \frac{n}{1+n} = -\frac{n}{1+n}$ ist, und $Gn = -1$ für $n = \infty$.

Für ein solches $Gn$ hat man also

$$n \log\left(\frac{n}{-Fn}\right) = \frac{\pi}{2} n \log\left(\frac{n}{1+n}\right),$$

woraus $$Fn = -n\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{\pi}{2}}.$$

Somit lautet die Gleichung der Trajectorien

$$\left(\frac{x-\xi}{\cos z} - n\right) e^{-\frac{z}{n}} = -n\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{\pi}{2}}.$$

Fragt man nach einer einhüllenden Curve dieser Trajectorien, so ergibt die Differentiation der Gleichung nach $n$

$$-e^{-\frac{z}{n}} + \frac{z}{n^2} e^{-\frac{z}{n}} \left( \frac{x-\xi}{\cos z} - n \right) = -\left( \frac{1+n}{n} \right)^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\frac{\pi}{2}}{n} \left( \frac{1+n}{n} \right)^{\frac{\pi}{2}-1}.$$

Der aus der ersten Gleichung folgende Werth

$$e^{-\frac{z}{n}} = \frac{-n\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{x-\xi}{\cos z} - n}$$ gilt in die zweite Gleichung eingesetzt

$$\frac{1+n}{\frac{x-\xi}{\cos z} - n} - \frac{z(1+n)}{n^2} = -\frac{1+n}{n} + \frac{\frac{\pi}{2}}{n},$$

woraus $n^2 \left( z + \frac{\pi}{2} + \frac{x-\xi}{\cos z} \right) -$

$$-n\left( z \cdot \frac{x-\xi}{\cos z} - z - \frac{x-\xi}{\cos z} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-\xi}{\cos z} \right) = z \cdot \frac{x-\xi}{\cos z}.$$

Die Substitution des so bestimmten Werthes von $n$ in die erste obige Gleichung liefert die Gleichung der einhüllenden Curve. Wie im vorigen Paragraphen, hat man aber zum Nachweise, dass hierdurch wirklich eine einhüllende Curve vorgestellt wird, nöthig zu zeigen, dass $z$ und $n$ Functionen von einander sind. Setzt man dieserhalb den Ausdruck

$$\frac{x-\xi}{\cos z} = n \left\{ 1 - \left( \frac{1+n}{u} \right)^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{z}{n}} \right\},$$

welcher aus der ersten Gleichung erhalten wird, in die zur Bestimmung von $n$ dienende Gleichung, so findet man

$$\left( \frac{1+n}{n} \right)^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{z}{n}} \left( -1 + \frac{z}{n} + \frac{\frac{\pi}{2}}{1+n} \right) + 1 = 0,$$

welche Gleichung den gewünschten Nachweis liefert. Zugleich kann diese Gleichung dazu dienen, über den Verlauf der einhüllenden Curve einige Aufklärung zu geben.

Es folgt aus ihr zunächst, was übrigens schon die blosse geometrische Anschauung zeigt, dass auf dem ganzen Wege der

einhüllenden Curve sämmtliche Trajectorien zwischen ihr und dem Kreise liegen. Man hat nämlich aus der obigen Gleichung der Trajectorien

$$x = n \cos z \left\{ 1 - \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{z}{n}} \right\} + \xi,$$

also für constantes $\xi$ und $z$

$$\frac{dx}{dn} = \cos z \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{\pi}{n}} e^{-\frac{z}{n}} \left\{ -1 + \frac{z}{n} + \frac{\frac{\pi}{2}}{1+n} \right\} + \cos z,$$

welcher Ausdruck für die vorige Gleichung zu Null wird. Die einhüllende Curve entspricht also für irgend ein $\xi$ und $z$ den Maximal- und Minimalwerthen von $x$ bei veränderlichem $n$.

Ferner ergibt sich aus der hier betrachteten Gleichung, dass die einhüllende Curve die zum Bogen $z = -\pi$ gehörige Kreistangente nicht mehr erreicht. Setzt man nämlich

$$\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{z}{n}} \left\{ -1 + \frac{z}{n} + \frac{\frac{\pi}{2}}{1+n} \right\} + 1 = Hn,$$ so wird bei jedem $z$ $Hn = 0$ für $n = \infty$. Nun ist bei constantem $z$

$$\frac{dHn}{dn} = \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\pi} \frac{-1}{\frac{e}{n^3}} \left\{ -z\pi - z^2 \left(\frac{1+n}{n}\right) \right\}.$$

Da dieser Ausdruck für $n = \infty$ endlich bleibt und für $z = -\pi$ bei jedem endlichen positiven $n$ negativ ist, so nimmt in diesem Falle $Hn$ mit wachsendem $n$ ab und wird erst bei $n = \infty$ Null. Es gibt also für $z = -\pi$ kein endliches positives $n$, welches der Gleichung $Hn = 0$ Genüge leistet.

Offenbar kann man noch viele andere Functionen $Gn$ anwenden, um durch mehr oder minder einfache Entwickelung zu einhüllenden Curven ähnlicher Art zu gelangen. Die Function

$$Gn = -\frac{n}{1+n}$$ würde z. B. $Fn = -n\, e^{\frac{\frac{\pi}{2}}{1+n}}$ und als Bestimmungsgleichung für $n$ eine Gleichung dritten Grades liefern.

Das vorige Beispiel, sowie das im §. 7. gegebene, mögen genügen, um das hier anzuwendende Verfahren, dessen Verwerthung wegen der über $Fn$ freistehenden Verfügung eine ausserordentlich mannichfaltige ist, zu erläutern.

§. 9. Andere bemerkenswerthe Curven fig. 1. ergeben sich auf folgende Weise.

Um sämmtliche Trajectorien von dem Kreispunkte $\begin{cases} \eta = -1 \\ \xi = 0 \end{cases}$ für den der Bogen $z = o$ anzuwenden ist, ausgehen zu lassen, hat man $n \log\left(\frac{n}{-Fn}\right) = o$ oder $Fn = -n$ zu setzen. Die Gleichung der Trajectorien ist demnach

$$\left(\frac{x-\xi}{\cos z} - n\right) e^{-\frac{z}{n}} = -n.$$

Eine solche Trajectorie schneidet die zum Bogen $z = -n$ gehörige Kreistangente in einem Punkte, dessen Ordinate $y = 1$ ist und dessen Abscisse sich aus der vorigen Gleichung ergibt als

$$x = n\,(e^{-\frac{\pi}{n}} - 1).$$

Zieht man durch diesen Punkt der Trajectorie eine Tangente an dieselbe, so hat man also dafür mit den laufenden Coordinaten $\alpha\beta$ die Gleichung

$$\alpha - 1 = n\left\{\beta - n\,(e^{-\frac{\pi}{n}} - 1)\right\}.$$

Um auf eine einhüllende Curve der so bestimmten Tangenten sämmtlicher Trajectorien zu untersuchen, differentiirt man nach $n$

und erhält $\beta = (2n + \pi)\,e^{-\frac{\pi}{n}} - 2n$, wodurch sofort $\beta$ als Function von $n$ und damit die Exsistenz der einhüllenden Curve nachgewiesen ist. Der aus der ersten Gleichung gezogene Werth

$e^{-\frac{\pi}{n}} = \frac{n\beta + n^2 - \alpha + 1}{n^2}$ führt in die zweite eingesetzt zu

$n^2\,(\beta + \pi) - 2n\left(\alpha - 1 - \beta\,\frac{\pi}{2}\right) = (\alpha - 1)\,\pi$, welche Gleichung mit einer der beiden vorigen durch Elimination von $n$ die Gleichung der einhüllenden Curve nur in $\alpha$ und $\beta$ ausgedrückt gilt. Der Verlauf dieser Curve wird einigermassen ersichtlich, wenn man die Werthe von $\beta$ und $\alpha$ für $n = \infty$ aufsucht.

Für $n = \infty$ hat man $\beta = 2n(e^{-\frac{\pi}{n}} - 1) + \pi =$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{n^2} e^{-\frac{\pi}{n}}}{\left(-\frac{1}{n^2}\right)} + \pi = -\pi.$$

Durch Benutzung dieses Werthes findet man aus der ersten obigen Gleichung auf demselben Wege für $n = \infty$ $\alpha = -\infty$.

Nun ist

$$\frac{d\beta}{dn} = 2\,(e^{-\frac{\pi}{n}} - 1) + \frac{2\pi e^{-\frac{\pi}{n}}}{n} + \frac{\pi^2}{n^2} e^{-\frac{\pi}{n}} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{n}} \left\{ 2 + \frac{2\pi}{n} + \frac{\pi^2}{n^2} - 2\, e^{\frac{\pi}{n}} \right\} =$$

$$= e^{-\frac{\pi}{n}} \left\{ 2 + \frac{2\pi}{n} + \frac{\pi^2}{n^2} - 2 - \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi^2}{2\,n^2} - \frac{2\pi^3}{6\,n^3} \cdots \right\},$$

also stets negativ für positives $n$, weshalb $\beta$ mit wachsendem $n$ abnimmt. Ferner ist

$$\frac{d\alpha}{dn} = 2n(e^{-\frac{\pi}{n}} - 1) + 2\pi e^{-\frac{\pi}{n}} + \frac{\pi^2}{n} e^{-\frac{\pi}{n}}$$

nicht unendlich für $n = \infty$.

Daraus schliesst man, dass die einhüllende Curve bis in die Nähe der Werthe $\beta = -\pi$ und $\alpha = -\infty$ gelangt.

Die Tangenten der so bestimmten einhüllenden Curve schneiden der obigen Ableitung zufolge die zum Bogen $z = -\pi$ gehörige Kreistangente unter Winkeln, welche stetig zwischen 0 und 90° verlaufen.

Es ist klar, dass man bei weiteren Umkreisungen der Trajectorien ganz analoge umhüllende Curven erhält, wenn man an die Stelle von $z = (-\pi)$ setzt $(-3\pi)$, $(-5\pi)$ u. s. f.

§. 10. Im Gegensatze zu den bisher betrachteten Trajectorien, welche bei negativem $Fn$ den Kreis selbst schnitten, erhält man Trajectorien, welche den Kreis nicht schneiden, wenn man $Fn$ einen positiven Werth oder den Werth Null beilegt. Setzt man zuvörderst $Fn = 0$, so ist alsdann die Gleichung der Trajectorien $\frac{x - \xi}{\cos z} - n = 0$ oder $(x - \xi)^2 = n^2 (1 - \xi^2)$.

Führt man hier den frühern Werth

$$\xi = \frac{x + y\sqrt{x^2+y^2-1}}{x^2+y^2} \text{ ein, so wird}$$

$$x^2(x^2+y^2-1)^2 + y^2(x^2+y^2-1) - 2xy(x^2+y^2-1)\sqrt{x^2+y^2-1}$$
$$= (x^2+y^2)^2 n^2 - n^2 x^2 - n^2 y^2 (x^2+y^2-1) - 2n^2 xy\sqrt{x^2+y^2-1}$$

$$\text{oder } 2xy\left\{x^2+y^2-1-n^2\right\}\sqrt{x^2+y^2-1} =$$

$$= \left\{x^2+y^2-1-n^2\right\}\left\{x^4+x^2y^2-x^2+y^2\right\}.$$

Die Annahme $2xy\sqrt{x^2+y^2-1} = x^4+x^2y^2-x^2+y^2$ führt auf $x^2(x^2+y^2) = x^2+y^2$, wodurch keine Curve erhalten wird.

Die andere Annahme
$x^2+y^2-1-n^2=0$ liefert einen mit dem ursprünglichen concentrischen Kreis, dessen Radius $=\sqrt{1+n^2}$ ist.

Für jedes $n$ hat man also einen bestimmten concentrischen Kreis als Trajectorie. Es verdient bemerkt zu werden, dass für jedes $n$ die früher betrachteten Trajectorien, sowie überhaupt sämmtliche Trajectorien, bei denen $Fn$ einen endlichen negativen Werth hat, sich innerhalb dieses concentrischen Kreises bewegen. Solche Trajectorien erreichen nämlich mit abnehmendem Bogen $z$ eine grössere Entfernung vom ursprünglichen Kreise.

Für ein unendliches negatives $z$ wird aber aus dem allgemeinen Ausdrucke der Trajectorien

$$\left(\frac{x-\xi}{\cos z} - n\right) e^{-\frac{z}{n}} = Fn$$

oder $\frac{x-\xi}{\cos z} - n = Fn\, e^{\frac{z}{n}}$ der specielle $\frac{x-\xi}{\cos z} - n = 0$,
woraus das Gesagte erhellt.

§. 11. Die erwähnten concentrischen Kreise, welche die Trajectorien, die bei negativem endlichen $Fn$ den ursprünglichen Kreis schneiden, ganz umschliessen, bilden auf der andern Seite die innere Grenze für die Trajectorien mit positivem endlichen $Fn$, welche sich ganz ausserhalb derselben bewegen und also auch den ursprünglichen Kreis nicht schneiden. Dieses ergibt sich in derselben Weise, wie vorhin, wenn man bedenkt, dass die hier betrachteten Trajectorien sich mit zunehmendem Bogen $z$ immer weiter vom ursprünglichen Kreise entfernen. Dass letzteres wirklich der Fall ist, zeigt die schon im §. 7 erwähnte Gleichung

$$x = \xi + \cos z \left( n + Fn \cdot e^{\frac{z}{n}} \right)$$

worin nunmehr $Fn$ positiv zu denken ist. Man sieht hieraus, wie analog der Verlauf der Trajectorien mit positivem endlichen $Fn$ und derjenigen mit negativem endlichen $Fn$ ist.

Um von den hier auftretenden einhüllenden Curven, für die die Verhältnisse zum Theil etwas anders sich gestalten, als für die der früheren Trajectorien, das einfachste Beispiel zu geben, so setze man $Fn = n$.

Die Gleichung dieser Trajectorien

$\left( \frac{x - \xi}{\cos z} - n \right) e^{-\frac{z}{n}} = n$ gibt nach $n$ differentiirt

$$- e^{-\frac{z}{n}} + \frac{z}{n^2} \left( \frac{x - \xi}{\cos z} - n \right) e^{-\frac{z}{n}} = 1.$$

Der aus der ersten Gleichung gewonnene Werth

$e^{-\frac{z}{n}} = \frac{n}{\frac{x - \xi}{\cos z} - n}$ gibt in die zweite gesetzt

$$n = \frac{z \cdot \frac{x - \xi}{\cos z}}{z + \frac{x - \xi}{\cos z}}$$

was mit der ersten Gleichung zusammengenommen gibt

$$\frac{z \cdot \cos z}{x - \xi} \cdot e^{\frac{z \cdot \cos z}{x - \xi} + 1} = 1.$$

Man erhält $n$ als Function von $z$ und damit die Exsistenz der einhüllenden Curve bewiesen, wenn man aus der ersten Gleichung

$$\frac{x - \xi}{\cos z} = n \left( 1 + e^{\frac{z}{n}} \right)$$

in die Bestimmungsgleichung für $n$ einsetzt, wodurch wird

$$\left( \frac{z}{n} - 1 \right) e^{\frac{z}{n}} = 1.$$

Setzt man $\frac{z}{n} - 1 = p$, so gibt es nur einen Werth von $p$, welcher die Gleichung $p\, e^{p+1} = 1$ erfüllt. Dieser ist ungefähr $p = 0{,}2785$, so dass man hat $z = 1{,}2785\, n$.

Es zeigt sich hieran, dass die einhüllende Curve nur Kreistangenten mit positivem Bogen $z$ trifft, sowie, dass sie sich in unzähligen spiralenartigen Zügen um den ursprünglichen Kreis bewegt.

In Erinnerung mag gebracht werden, dass die Trajectorien, für welche $Fn = -n$ war, sämmtlich von einem Punkte ausgingen, der zugleich auf dem ursprünglichen Kreise lag.

Die Ableitung der vielen sonstigen einhüllenden Curven, welche hier möglich sind, ist dem bisher Entwickelten so sehr analog, dass es kaum nöthig sein wird, noch länger dabei zu verweilen.

§. 12. An Stelle des Kreises mird man eine andere ursprüngliche Curve erhalten, wenn man im §. 3 die Substitution

$$\frac{d\xi}{dz} = \sin z \cos z \text{ anwendet.}$$

Indem die Bezeichnungen des genannten Paragraphen wieder benutzt werden, hat man für diese Substitution

$$\varphi''\xi = \frac{1}{\sin z \,.\, \cos^3 z} = \frac{(1+\varphi'\xi^2)^2}{\varphi'\xi}$$

mithin nach demselben Verfahren, wie dort,

$$\eta - c = \int \frac{u^2\, du}{(1+u^2)^2} \text{ und } \xi - c_{,} = \int \frac{u\, du}{(1+u^2)^2}$$

oder $$\eta - c = -\frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u$$

und $$\xi - c_{,} = \frac{u^2}{2(1+u^2)}$$

Zwischen beiden Gleichungen ist $u$ zu eliminiren. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$u = \pm \sqrt{\frac{2(\xi - c_{,})}{1 - 2(\xi - c_{,})}}, \text{ wodurch die erste wird zu}$$

$$\eta - c = \mp \frac{1}{2} \sqrt{2(\xi - c_{,}) - 4(\xi - c_{,})^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \operatorname{arctg} = \pm \sqrt{\frac{2(\xi - c_{,})}{1 - 2(\xi - c_{,})}} \right)$$

wo die doppelten Zeichen einander entsprechen. Nimmt man für die Folge $c = c_1 = 0$ an, so lautet die Gleichung der Curve

$$\eta = \mp \frac{1}{2} \sqrt{2\xi(1-2\xi)} + \frac{1}{2} \left( \text{arctg} = \pm \sqrt{\frac{2\xi}{1-2\xi}} \right)$$

woraus der Verlauf derselben deutlich zu ersehen ist (fig. 2). Es sind nur positive Werthe von $\xi$ zulässig, die zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1/2$ liegen. Zu jedem $\xi$ gehören unendlich viele positive und negative $\eta$, deren ungefähre Lage bestimmt wird durch die Werthe, welche $\eta$ für $\xi = 0$ und $\xi = 1/2$ annimmt. Für $\xi = 0$ hat man $\eta = 0$ oder $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{2}$ . . . . . oder $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(-\frac{2\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ ...., für $\xi = 1/2$ $\eta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$.... oder $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ . . . .

Der Ausdruck $\frac{d\eta}{dx} = \pm \sqrt{\frac{2\xi}{1-2\xi}}$, wo das doppelte Vorzeichen den obigen entspricht, zeigt, dass das Stück der Curve, welches von $\eta = 0$ bis $\eta = \frac{\pi}{4}$ sich erstreckt, sowie alle mit demselben gleichgerichteten Stücke, durch das obere Vorzeichen in der Gleichung der Curve ausgedrückt sind, während das untere Vorzeichen das Stück der Curve von $\eta = 0$ bis $\eta = -\frac{\pi}{4}$ und alle mit demselben gleichgerichteten Stücke vorstellt.

Aus dem Umstande, dass der Werth $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \pm (2\xi)^{-1/2} (1-2\xi)^{-3/2}$ zwischen $\xi = 0$ und $\xi = 1/2$ nie Null wird, schliesst man, dass die Curve auf dem jedesmaligen Wege von der Ordinatenaxe zu der durch die Gleichung $\xi = 1/2$ repräsentirten Geraden oder umgekehrt stets convex, resp. concav gegen die Abscissenaxe ist. Da nun für irgend ein zulässiges $\xi$, z. B. für $\xi = 1/4$, und für den Weg der Curve von $\eta = 0$ bis $\eta = \frac{\pi}{4}$ der Ausdruck

$$\eta \cdot \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -\frac{1}{2(1-2\xi)} \pm 1/2 (2\xi)^{-1/2} (1-2\xi)^{-3/2} \left( \text{arctg} = \pm \sqrt{\frac{2\xi}{1-2\xi}} \right)$$

$= -1 + 2 \cdot \frac{\pi}{4}$ ist, so ist die Curve von $\eta = 0$ bis $\eta = \frac{\pi}{4}$ convex gegen die Abscissenaxe. Ebenso ist für $\xi = 1/4$ und für den Weg die Curve von $\eta = 0$ bis $\eta = -\frac{\pi}{4}$ der Ausdruck $\eta \cdot \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = -1 - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)$, so dass hier die Curve ebenfalls convex gegen die Abscissenaxe ist. Die übrigen Stücke der Curve sind hierdurch rücksichtlich ihrer Convexität, resp. Concavität gegen die Abscissenaxe hinreichend charakterisirt. Es erhellt aus dem Gesagten, dass die früher angegebenen Punkte, worin die Curve die Ordinatenaxe trifft, Rückkehrpunkte sind, von denen aus sich immer zwei Aeste der Curve zu beiden Seiten der Tangenten bewegen, die in diesen Punkten an die Curve gezogen werden und der Abscissenaxe parallel sind. Die durch die Gleichung $\xi = 1/2$ charakterisirte Gerade berührt dagegen die Curve in den oben angegebenen Punkten.

§. 13. Die vorliegende Substitution $\frac{d\xi}{dz} = \sin z \cdot \cos z$ macht das im §. 3 genannte allgemeine Integral zu

$$\int \frac{e^{-\frac{z}{n}}}{\pm\cos z} \cdot \sin z \cdot \cos z \, dz = \pm \int \sin z \cdot e^{-\frac{z}{n}} \, dz =$$

$$= \pm \, e^{\frac{-\frac{z}{n}\left(-\frac{1}{n}\sin z - \cos z\right)}{\frac{1}{n^2}+1}}$$

Demnach sind die Trajectorien, welche die Tangenten der im vorigen Paragraphen untersuchten Curve unter dem Winkel $\lambda$, dessen trigonometrische Tangente $n$ ist, schneiden, repräsentirt durch das System von Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{x-\xi}{\pm\cos z} e^{-\frac{z}{n}} \pm e^{\frac{-\frac{z}{n}\left(-\frac{1}{n}\sin z - \cos z\right)}{\frac{1}{n^2}+1}} = Fn \\ \text{und} \quad y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x-\xi) \end{cases}$$

Da im vorigen Paragraphen $u = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} z$ ist, so hat man

$$\eta = \frac{z}{2} - \frac{\sin z \,.\, \cos z}{2} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{\sin^2 z}{2}$$

Mit Hülfe dieser Werthe können die beiden aufgestellten Gleichungen in $x$, $y$ und $z$ ausgedrückt werden, wo dann $z$ zu eliminiren ist.

Rücksichtlich des Bogens $z$, welcher den von den Tangenten der $\eta\xi$curve mit der Abscissenaxe gebildeten Winkeln zugelegt werden muss, ist zu bemerken, dass wegen

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \pm (2\xi)^{-1/2} \,.\, (1 - 2\xi)^{-3/2}$$

$z = 0$ angenommen wird für $\eta = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$ für $\eta = \frac{\pi}{4}$, $z = \pi$ für $\eta = \frac{\pi}{2}$ u. s. w., andererseits $z = -\frac{\pi}{2}$ für $\eta = -\frac{\pi}{4}$, $z = -\pi$ für $\eta = -\frac{\pi}{2}$ u. s. w.

Macht man in der Gleichung der Trajectorien die besondere Annahme $Fn = 0$, so hat man, da die doppelten Vorzeichen dort correspondiren, einfach $\frac{x - \xi}{\cos z}(1 + n^2) - n \sin z - n^2 \cos z = 0$ und $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$.

Für die Schneidepunkte der hierdurch bestimmten Trajectorien mit der $\eta\xi$curve selbst ist $-n \sin z - n^2 \cos z = 0$ d. h. $\operatorname{tg} z = -n$, wo $z$ den zum Schneidepunkte gehörigen Bogen vorstellt. Daraus folgt, dass die Schneidepunkte nur auf denjenigen Stücken der $\eta\xi$curve liegen, welche im §. 12 als dem unteren Vorzeichen in der Gleichung der Curve angehörend bezeichnet wurden. Für das Curvenstück von $\eta = 0$ bis $\eta = \frac{\pi}{2}$ z. B. liegen die Schneidepunkte nur auf dem Theil zwischen $\eta = \frac{\pi}{4}$ und $\eta = \frac{\pi}{2}$ und zwar um so näher nach $\eta = \frac{\pi}{2}$ hin, je kleiner $n$ ist.

Aus $x = \frac{\sin^2 z}{2} + \frac{1}{(1+n^2)} \left\{ n \sin z \cos z + n^2 \cos z^2 \right\}$, welches nur ein anderer Ausdruck für die obige Gleichung der hier betrachteten Trajectorien ist, folgt

$$\frac{dx}{dz} = \sin z \,.\, \cos z + \frac{1}{1+n^2}\left\{ n\cos^2 z - n\sin^2 z - 2n^2 \cos z \sin z \right\} =$$

$$= \frac{\cos^2 z}{1+n^2}\,(\operatorname{tg} z + n)\,(1 - n \operatorname{tg} z).$$

Dieser Werth wird zu Null durch

$$\operatorname{tg} z = -n \quad \text{und durch} \quad \operatorname{tg} z = \frac{1}{n}.$$

Ersteres bedeutet den Schneidepunkt der Trajectorie mit der $\eta\xi$curve, letzteres denjenigen Werth von $z$, für welchen das zugehörige $x$ der Trajectorie ein Maximum ist.

Aus all diesem ist der ungefähre Lauf dieser Trajectorien hinreichend ersichtlich (Fig. 3). Um ihn z. B. für $\lambda = \frac{\pi}{4}$, also $n = 1$ anzugeben, so schneidet die zugehörige Trajectorie die $\eta\xi$curve in dem durch $z = \frac{3\pi}{4}$ charakterisirten Punkte, hat ein Maximum für $x$ dort, wo sie die zu $z = \frac{\pi}{4}$ gehörige Tangente der $\eta\xi$curve trifft, indem alsdann $x = 3/4$ ist, und endet natürlich in der Abscissenaxe, soweit nur das Stück der $\eta\xi$curve in Betracht kommt, welches sich von $\eta = 0$ bis $\eta = \frac{\pi}{2}$ erstreckt. Für die andern Stücke der $\eta\xi$curve findet völlig Analoges statt.

§. 14. Um auf eine einhüllende Curve der im §. 13 behandelten Trajectorien zu untersuchen, differentiirt man deren Gleichung nach $n$ und erhält $2n\frac{x-\xi}{\cos z} - \sin z - 2n\cos z = 0$.

Aus dieser und der differentiirten Gleichung $\frac{x-\xi}{\cos z}$ eliminirt gibt $n^2 \sin z - \sin z - 2n\cos z = 0$, wodurch $n$ als Function von $z$ und damit die einhüllende Curve erwiesen ist.

Die letzte Gleichung liefert die beiden Werthe

$$n = \frac{\cos z + 1}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{z}{2}} \quad \text{und} \quad n = \frac{\cos z - 1}{\sin z} = -\operatorname{tg}\frac{z}{2}$$

Da $n$ nur positiv ist, so hat man je nach dem Bogen $z$ sich für den einen oder andern Werth zu entscheiden. Die Substitution des richtig gewählten Werthes von $n$ in eine der beiden obigen

Gleichungen führt mit $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$ zusammengenommen zu der Gleichung der einhüllenden Curve.

Will man die Betrachtung für das Stück der $\eta\xi$curve zwischen $\eta = 0$ und $\eta = \frac{\pi}{2}$, wo also $z$ sich zwischen 0 und $\pi$ bewegt, anstellen, so ergibt die Substitution des hier erforderlichen Ausdruckes $n = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{z}{2}} = \frac{\cos z + 1}{\sin z}$

in $2n\frac{x - \xi}{\cos z} - \sin z - 2n\cos z = 0$

oder $2n\left(\frac{x - \frac{\sin^2 z}{2}}{\cos z}\right) - \sin z - 2n\cos z = 0$

nach ausgeführter Rechnung das Resultat

$$x = \frac{1 + \cos z}{2} \quad \text{oder} \quad \cos z = 2x - 1.$$

Wird nun die Gleichung $(y - \eta) = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$

in der Form geschrieben

$$y - \frac{z}{2} + \frac{\sin z \,.\, \cos z}{2} = \operatorname{tg} z\left(x - \frac{\sin^2 z}{2}\right),$$

so ist das auch $\left(y - \frac{z}{2}\right)\cos z = \frac{\sin z}{2}(2x - 1)$.

Führt man hier die eben gefundene Beziehung ein, so erhält man als Gleichung der einhüllenden Curve für das betrachtete Stück der $\eta\xi$curve

$$\left\{y - 1/2 \text{ arc } (\cos = 2x - 1)\right\} = \sqrt{x(1 - x)}$$

Für $\sin z$ musste natürlich das positive Wurzelzeichen gewählt werden, da $z$ zwischen 0 und $\pi$ liegt.

Der Verlauf dieser einhüllenden Curve fig. 4. ist leicht anzugeben. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{x}{1 - x}}$ lässt erkennen, dass die Curve für $x = 0$ der Abscissenaxe parallel ist, während sie für $x = 1$ senkrecht zu derselben steht. In ersterem Falle ist $y = \frac{\pi}{2}$, die Curve berührt also dort die $\eta\xi$curve; in letzterem Falle ist $y = 0$, die Curve schneidet die Tangente der $\eta\xi$curve,

welche durch die Abscissenaxe vorgestellt wird, unter einem rechten Winkel. Dazwischen nimmt $y$ mit wachsendem $x$ stetig ab. Für die anderen Theile der $\eta\xi$curve ist der Verlauf der einhüllenden Curve ein dem vorigen durchaus gleichmässiger, weshalb ein näheres Eingehen darauf kaum mehr als eine Wiederholung sein würde.

§. 15. Eine grosse Aehnlichkeit mit der in §. 12 bis 14 behandelten Substitution bietet die folgende Substitution $\frac{d\xi}{dz} = \cos^2 z$ dar. Man hat mit den früheren Bezeichnungen

$$\varphi''\xi = \frac{1}{\cos^4 z} = (1+\varphi'\xi^2)^2,$$

also $$\eta = \int^{\cdot} \frac{u\,du}{(1+u^2)^2} = \frac{u^2}{2(1+u^2)}$$

und $$\xi = \int^{\cdot} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{u}{2(1+u^2)} + {}^1/_2 \operatorname{arctg} u,$$

wobei die willkührlichen Constanten sofort gleich Null gesetzt sind. Daraus

$$u = \pm \sqrt{\frac{2\eta}{1-2\eta}} \quad \text{und}$$

$$\xi = \pm {}^1/_2 \sqrt{2\eta(1-2\eta)} + {}^1/_2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \pm \sqrt{\frac{2\eta}{1-2\eta}}\right)$$

als Gleichung der ursprünglichen Curve.

Vertauscht man hier die Abscissen- und die Ordinaten-Axe mit einander, so erhält man

$$\eta = \pm {}^1/_2 \sqrt{2\xi(1-2\xi)} + {}^1/_2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \pm \sqrt{\frac{2\xi}{1-2\xi}}\right)$$

Schreibt man jetzt $1/2 - \xi$ statt $\xi$ und $\eta - \frac{\pi}{4}$ statt $\eta$, so wird

$$\eta = + {}^1/_2 \sqrt{(1-2\xi)2\xi} + {}^1/_2 \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} = \pm \sqrt{\frac{1-2\xi}{2\xi}}\right)$$

Man sieht, dass die gegenwärtige Curve Fig. 5. mit der in §. 12. behandelten identisch ist; die geänderte Lage der Curve gegen das Coordinatensystem ist durch die angegebenen Transformationen charakterisirt. Wenn man wieder die Form der Gleichung

$$\xi = + {}^1/_2 \sqrt{2\eta(1-2\eta)} + {}^1/_2 \left(\operatorname{arctg} = \pm \sqrt{\frac{2\eta}{1-2\eta}}\right)$$

annimmt, so berührt die Curve die Abscissenaxe in den Punkten

$\xi = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2} \ldots -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{2} \ldots$, und steht senkrecht in den Punkten $\xi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \ldots -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \ldots$ Letztere Punkte, für welche sämmtlich $\eta = 1/2$ ist, sind Rückkehrpunkte.

Die vorliegende Substitution $\frac{d\xi}{dz} = \cos^2 z$ wird natürlich genau dieselben Trajectorien und einhüllenden Curven ergeben, die schon in §. 13. und 14. gefunden sind, nur in anderer Lage gegen das Coordinatensystem. Es möge gestattet sein, die Hauptmomente der Rechnung anzuführen.

Das allgemeine Integral des §. 3. wird jetzt zu

$$\int \pm \cos z \, e^{-\frac{z}{n}} dz = \pm \frac{e^{-\frac{z}{n}} \left(-\frac{1}{n} \cos z + \sin z\right)}{\frac{1}{n^2} + 1}$$

Macht man nun die specielle Annahme $Fn = 0$, so gilt für die Trajectorien das System von Gleichungen

$$\begin{cases} (1 + n^2) \frac{x - \xi}{\cos z} - n \cos z + n^2 \sin z = 0 \\ \text{und } y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi} (x - \xi) \end{cases}$$

Durch Einführung der Werthe $\eta = \frac{\sin^2 z}{2}$ $\xi = \frac{z}{2} + \frac{\sin z \cos z}{2}$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} z$ kann man die beiden Gleichungen nur in $x$, $y$ und $z$ ausdrücken. Der Bogen $z$ ist für $\xi = 0$ ebenfalls 0, für $\xi = \frac{\pi}{4}$ ist $z = \frac{\pi}{2}$, für $\xi = \frac{\pi}{2}$ $z = \pi \ldots$, für $\xi = -\frac{\pi}{4}$ $z = -\frac{\pi}{2}$ für $\xi = -\frac{\pi}{2}$ $z = -\pi \ldots$.

Die hier betrachteten Trajectorien schneiden die $\eta\xi$ curve in Punkten, für welche $z$ bestimmt wird durch die Relation $\operatorname{tg} z = \frac{1}{n}$ so dass Schneidepunkte nur auf dem Stücke der $\eta\xi$ curve von $\xi = 0$ bis $\xi = \frac{\pi}{4}$ und auf allen gleichgerichteten Stücken liegen.

Setzt man aus der ersten Gleichung der Trajectorien den Werth

$$x - \frac{z}{2} = \frac{\sin z \, . \, \cos z}{2} + \frac{1}{1+n^2} (n \cos^2 z - n^2 \sin z \cos z)$$

in die zweite Gleichung

$$y - \frac{\sin^2 z}{2} = \operatorname{tg} z \left( x - \frac{z}{2} - \frac{\sin z \,.\, \cos z}{2} \right)$$

oder $y = \operatorname{tg} z \left( x - \frac{z}{2} \right)$ ein, so ergibt sich

$$y = \frac{\sin^2 z}{2} + \frac{n \sin z \cos z}{1 + n^2} - \frac{n^2 \sin^2 z}{1 + n^2}, \text{ woraus}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\cos^2 z}{1 + n^2} (\operatorname{tg} z + n)(1 - n \operatorname{tg} z) \text{ folgt.}$$

Durch $\operatorname{tg} z = -n$ wird ein Minimum von $y$ charakterisirt. Will man danach z. B. den Lauf der zu $n = 1$ gehörigen Trajectorie verfolgen, so schneidet dieselbe, insoweit man das Stück der $\eta\xi$curve von $\xi = \frac{\pi}{4}$ bis $\xi = -\frac{\pi}{4}$ berücksichtigt, die $\eta\xi$curve in dem durch $z = \frac{\pi}{4}$ bestimmten Punkte, hat den kleinsten Werth von $y$, nämlich $y = -1/4$, dort, wo sie die zu $z = -\frac{\pi}{4}$ gehörige Tangente der $\eta\xi$curve trifft, und endigt in der Abscissenaxe im Punkte $x = -\frac{\pi}{4}$.

Indem man zum Zwecke der Auffindung einer einhüllenden Curve der vorliegenden Trajectorien deren Gleichung nach $n$ differentiirt, wird $2n \frac{x - \xi}{\cos z} - \cos z + 2n \sin z = 0.$

Der aus der differentiirten Gleichung gewonnene Werth $\frac{x - \xi}{\cos z} = \frac{n \cos z - n^2 \sin z}{1 + n^2}$ gibt hier eingesetzt $n = \frac{-\sin z \pm 1}{\cos z}$ womit die Exsistenz der einhüllenden Curve dargethan ist. Man hat je nach dem Bogen $z$ das eine oder das andere Vorzeichen in der vorigen Beziehung zu wählen, um ein positives $n$ zu erhalten.

Um die Betrachtung für das Stück der $\eta\xi$curve, an welchem $z$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ liegt, durchzuführen, bedient man sich des Werthes $n = \frac{1 - \sin z}{\cos z}$. Nun findet sich aus der Gleichung für die einhüllende Curve $2n \frac{x - \xi}{\cos z} - \cos z + 2n \sin z = 0$

der Ausdruck $x - \frac{z}{2} = \frac{\cos^2 z}{2n} - \frac{\sin z \cos z}{2}$, welcher in die andere Gleichung für die einhüllende Curve $y = \operatorname{tg} z \left(x - \frac{z}{2}\right)$ eingesetzt mit Beziehung auf $n = \frac{1 - \sin z}{\cos z}$ den Werth $2y = \sin z$ liefert. Dieser Werth sowie der andere $n = \frac{1 - \sin z}{\cos z}$ in $2n \frac{x - \xi}{\cos z} - \cos z + 2n \sin z = 0$ eingeführt ergibt

$x = \frac{z}{2} + \frac{\cos z}{2} = {}^1/_2 \operatorname{arc}(\sin = 2y) + {}^1/_2 \sqrt{1 - 4y^2}$

als einzige Gleichung der einhüllenden Curve.

Der Differentialquotient $\frac{dx}{dy} = \frac{1 - 2y}{\sqrt{1 - (2y)^2}}$ verschafft einige Aufklärung über ihren Gang. Für $y = {}^1/_2$ ist $\frac{dx}{dy} = {}^0/_0 = \frac{\sqrt{1 - (2y)^2}}{2y} = 0$, für $y = 0$ $\frac{dx}{dy} = 1$, für $y = -{}^1/_2$ $\frac{dx}{dy} = \infty$; zugleich hat man für diese 3 Werthe für $x$ die Werthe $x = \frac{\pi}{4}$ $x = {}^1/_2$ und $x = -\frac{\pi}{4}$.

Die einhüllende Curve berührt also die $\eta\xi$curve in dem ersteren Punkte, schneidet in dem mittleren Punkte die Abscissenaxe unter 45° in der Entfernung $= {}^1/_2$ vom Coordinatenanfang, und trifft senkrecht auf die durch den Punkt $\xi = -\frac{\pi}{4}$ gehende Tangente der $\eta\xi$curve in einer Entfernung $y = -{}^1/_2$ von der Abscissenaxe. Für die andern Stücke der $\eta\xi$curve erhält man entsprechende Resultate.

§. 16. Eine weitere ursprüngliche Curve fig. 6. wird erhalten durch die Substitution $\frac{d\xi}{dz} = \cos^3 z$ im Paragraphen 3., welche mit Beibehaltung der übrigen dort verwandten Bezeichnungen ergibt $\varphi''\xi = \frac{1}{\cos^5 z} = \pm (1 + \varphi'\xi^2)^{5/2}$,

folglich $\eta = \pm \int \frac{u\,du}{(1+u^2)^{5/2}} = \mp \frac{1}{3\,(1+u^2)^{3/2}}$

und $\xi = \pm \int \frac{du}{(1+u^2)^{5/2}} = \pm \frac{3u + 2u^3}{3\,(1+u^2)^{3/2}}$,

wobei die willkührlichen Constanten der Integration gleich Null angenommen sind. Man gewinnt aus beiden Gleichungen sofort

$u^2 = \frac{1}{(3\eta)^{2/3}} = 1$ und $\frac{\xi^2}{\eta^2} = u^2\,(3 + 2u^2)^2$, also

$\frac{\xi^2}{\eta^2} = \left\{\frac{1}{(3\eta)^{2/3}} - 1\right\}\left\{1 + \frac{2}{(3\eta)^{2/3}}\right\}^2$ oder nach vollzogener Reduction $(3\xi)^2 + (3\eta)^2 + 3\,(3\eta)^{4/3} = 4$.

Es zeigt sich hier, dass nur Werthe von $\xi$ zulässig sind, für welche $4 \gtrless (3\xi)^2$ ist. Andererseits müssen die $\eta$ der Bedingung $4 \gtrless (3\eta)^2 + 3\,(3\eta)^{4/3}$ genügen, woraus folgt, dass $3\eta$ nur zwischen $+1$ und $-1$ liegen kann.

Für jedes mögliche $\eta$ gibt es zwei gleiche entgegengesetzte $\xi$. Umgekehrt hat die Gleichung, als Gleichung dritten Grades in Beziehung auf $(3\eta)^{2/3}$ betrachtet, wegen des positiven Coëfficienten von $(3\eta)^{4/3}$ nur eine reelle Wurzel, so dass auch jedem möglichen $\xi$ zwei gleiche entgegengesetzte $\eta$ entsprechen. Die Curve liegt also symmetrisch zu den beiden Coordinatenaxen; sie schneidet dieselben in den Punkten $\eta = \pm 1/3$ und $\xi = \pm 2/3$, wodurch zugleich nach Obigem die grössten, resp. kleinsten Werthe der Coordinaten bezeichnet sind.

In den Punkten $\eta = \pm 1/3$ und $\xi = \pm 2/3$ ist die Curve der Abscissen- resp. Ordinatenaxe parallel, wie sich an dem Ausdruck

$$\frac{d\xi}{d\eta} = + \frac{\eta + \frac{2\eta}{(3\eta)^{2/3}}}{\sqrt{4/9 - \eta^2 - 1/3\,(3\eta)^{4/3}}}$$ zeigt.

Was die zu dieser Curve gehörigen Trajectorien anbelangt, so ist durch die obige Substitution

$$\int \sqrt{1+\varphi'\xi^2}\,.\,e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}=\varphi'\xi}\,d\xi = \pm \int \cos^2 z\,.\,e^{-\frac{z}{n}}\,dz =$$

$$= \pm \frac{e^{\mp \frac{z}{n}} \cos z \left(2 \sin z - \frac{1}{n} \cos z\right)}{\frac{1}{n^2} + 4} \pm \frac{2 e^{-\frac{z}{n}}}{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + 4\right)}$$

man hat also für die Trajectorien

$$\frac{x - \xi}{\pm \cos z} e^{-\frac{z}{n}} \pm \frac{e^{-\frac{z}{n}} \cos z \left(2 \sin z - \frac{\cos z}{n}\right)}{\frac{1}{n^2} + 4} \pm \frac{2 e^{-\frac{z}{n}}}{-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + 4\right)} =$$

$= Fn$ und $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$.

Unter der Annahme $Fn = 0$ geht dieses System von Gleichungen in das andere über:

$$\frac{x - \xi}{\cos z}(4n^2 + 1) + 2n^2 \cos z \sin z - n \cos z^2 - 2n^3 = 0$$

und $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$.

Um $\eta$ und $\xi$ in $z$ auszudrücken, so ist $\eta = \mp \cos 3z$ und $\xi = \pm \sin z \,.\, \cos^2 z \pm {}^2/_3 \sin^3 z = \pm \sin z \mp \frac{\sin^3 z}{3}$.

Wenn man den Bogen $z = 0$ nimmt für den Punkt der $\eta\xi$curve $\begin{cases} \eta = -{}^1/_3 \\ \xi = 0 \end{cases}$, $z = \frac{\pi}{2}$ für $\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi = {}^2/_3 \end{cases}$,

$z = \pi$ für $\begin{cases} \eta = {}^1/_3 \\ \xi = 0 \end{cases}$, $z = \frac{3\pi}{2}$ für $\begin{cases} \eta = 0 \\ \xi = -{}^2/_3 \end{cases}$ u. s. f., so kann

man einfach schreiben $\eta = -\frac{\cos^3 z}{3}$ und $\xi = \sin z - \frac{\sin^3 z}{3}$.

Für einen Durchschnittspunkt der $\eta\xi$curve mit den Trajectorien würde man haben $2n^2 \cos z \,.\, \sin z - n \cos z^2 - 2n^3 = 0$

oder $n = \frac{\cos z}{2}\left\{\sin z \pm \sqrt{\sin^2 z - 2}\right\}$, woraus zu ersehen ist, dass es keinen solchen Durchschnittspunkt gibt.

Durch Einführung der aufgestellten Werthe für $\eta$ und $\xi$ in die erste Gleichung der Trajectorien bekommt man

$$x = \frac{3(2n^2 + 1)\sin z + (2n^2 - 1)\sin 3z + 3n \cos^3 z + 6n^3 \cos z}{3(4n^2 + 1)}$$

Die zweite Gleichung der Trajectorien wird zu

$$y + \frac{\cos^3 z}{3} = \operatorname{tg} z \left(x - \sin z + \frac{\sin 3z}{3}\right)$$

$$\text{oder} \quad y \cos z = x \sin z - \frac{1 + \sin^2 z}{3}.$$

Substituirt man hier den vorigen Ausdruck für $x$, so ergibt sich

$$y = \frac{3n(2n^2+1)\sin z + (2n^2-1)\cos^3 z - 3n\sin^3 z - 6n^2\cos z}{3(4n^2+1)}$$

Zu diesen beiden für $x$ u. $y$ aufgestellten Gleichungen mögen auch die für die Differentialquotienten genommen werden, nämlich

$$\frac{dx}{dz} = \frac{(2n^2+1)\cos z + (2n^2-1)\sin^2 z \cos z - 3n\cos^2 z \sin z - 2n^3 \sin z}{4n^2+1}$$

und

$$\frac{dy}{dz} = \frac{n(2n^2+1)\cos z - (2n^2-1)\cos^2 z \sin z - 3n\sin^2 z \cos z + 2n^2 \sin z}{4n^2+1}$$

Da die Werthe von $x$ und $y$ ungeändert bleiben, wenn man $2\pi + z$ an die Stelle von $z$ setzt, und da ausserdem die Differentialquotienten nie unendlich werden, so folgt, dass die Trajectorien geschlossene Curven bilden. Da ferner $x$ und $y$ einen gleichen, aber entgegengesetzten Werth erhalten, wenn man $\pi + z$ an die Stelle von $z$ setzt, so schliesst man daraus auf die symmetrische Lage dieser Curven.

Als hervorzuhebende Werthe der Coordinaten hat man für $z = 0$

$$x = \frac{n + 2n^3}{4n^2+1} \quad y = -\,1/3,$$

$$\text{für } z = \frac{\pi}{2} \quad x = 2/3 \quad y = \frac{2n^3}{4n^2+1},$$

$$\text{für } z = \pi \quad x = -\frac{n + 2n^3}{4n^2+1} \quad y = 1/3,$$

$$\text{für } z = \frac{3\pi}{2} \quad x = -\,2/3 \quad y = -\frac{2n^3}{4n^2+1}.$$

Der Differentialquotient $\frac{dx}{dz}$ lässt sich auch schreiben

$$\frac{dx}{dz} = \frac{(\cos z - n \sin z)(2n^2 - 2n \sin z \cos z + \cos^2 z)}{4n^2+1}.$$

Da, wie oben nachgewiesen ist,
$2n^2 - 2n \cos z \sin z + \cos^2 z = 0$ auf ein imaginäres $n$ führt, so wird dieser Differentialquotient nur Null durch $\operatorname{tg} z = \frac{1}{n}$

Zu dem hierdurch bestimmten $z$ gehören die Werthe

$$x = \pm \frac{6n^4 + 9n^2 + 2}{3(4n^2+1)\sqrt{1+n^2}} \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{2n^3}{3(4n^2+1)\sqrt{1+n^2}}$$

Ebenso lässt sich schreiben

$$\frac{dy}{dz} = \frac{(n \cos z + \sin z)\,(2n^2 - 2n \cos z \sin z + \cos^2 z)}{4n^2 + 1},$$

welcher Ausdruck nur Null wird durch $\operatorname{tg} z = -n$.

Für dieses $z$ hat man

$$x = \mp \frac{2n^3}{3(4n^2+1)\sqrt{1+n^2}} \quad \text{und} \quad y = \mp \frac{6n^4 + 6n^2 + 1}{3(4n^2+1)\sqrt{1+n^2}}.$$

Fragt man nach einer einhüllenden Curve der hier betrachteten Trajectorien, so ergibt eine Differentiation nach $n$ der Gleichung $(4n^2+1)\frac{x-\xi}{\cos z} + 2n^2 \sin z \cos z - n \cos^2 z - 2n^3 = 0$ das Folgende $8n\frac{x-\xi}{\cos z} + 4n \sin z \cos z - \cos^2 z - 6n^2 = 0$

Setzt man aus der differentiirten Gleichung

$$\frac{x-\xi}{\cos z} = \frac{n \cos^2 z + 2n^3 - 2n^2 \sin z \cos z}{4n^2+1}$$

in die zweite ein, so erhält man

$$(2n \cos z + \sin z)^2 = 1 + 6n^2 + 8n^4.$$

Wird $2n \cos z + \sin z = Hz$ bezeichnet, so ist $\frac{dHz}{dz} = -2n \sin z + \cos z$, woraus folgt, dass $(Hz)^2$ seinen grössten Werth erhält für $\operatorname{tg} z = \frac{1}{2n}$. Hierfür ist aber $(Hz)^2 = 4n^2 + 1$, mithin würde im äussersten Falle sein $4n^2 + 1 = 1 + 6n^2 + 8n^4$. Daran zeigt sich die Unmöglichkeit einer einhüllenden Curve, die sich übrigens schon im Voraus erwarten liess.

Die der zuletzt abgehandelten verwandte Substitution $\frac{d\xi}{dz} = \sin^2 z \cdot \cos z$ möge nur angedeutet werden. Vermittelst derselben ergibt sich $\varphi''\xi = \pm \frac{(1 + \varphi'\xi^2)^{5/2}}{\varphi'\xi^2}$, also

$$\eta = \pm \int \frac{u^3\,du}{(1+u^2)^{5/2}} \quad \text{und} \quad \xi = \pm \int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^{5/2}}$$

oder $\eta = \mp \frac{2+3u^2}{3(1+u^2)^{3/2}}$ und $\xi = \pm \frac{u^3}{3(1+u^2)^{3/2}}$.

Ferner ist

$$\int \sqrt{1+\varphi'\xi^2}\; e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi}\, d\xi = \pm \int \sin^2 z\; e^{-\frac{z}{n}}\, dz =$$

$$= \pm \frac{e^{-\frac{z}{n}} \left\{ \sin z - \frac{1}{n} \sin z - 2\cos z \right\}}{4 + \frac{1}{n^2}} \pm \frac{2\, e^{-\frac{z}{n}}}{-\frac{1}{n}\left(4 + \frac{1}{n^2}\right)},$$

so dass man unter der Annahme $Fn = 0$ für die Trajectorien hat

$$\frac{x-\xi}{\cos z}(4n^2+1) - n\sin^2 z - 2n^2 \sin z \cos z - 2n^3 = 0$$

und $\quad y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x-\xi).$

Es ist klar, wie man auf dem bisher betretenen Wege weiter gehen kann, indem man die Substitutionen

$\frac{d\xi}{dz} = \cos^4 z,\ = \sin^3 z \,.\, \cos z$ u. s. f. verwendet.

§. 17. In Kürze möge noch die folgende Substitution betrachtet werden, welche nicht mehr rein trigonometrischer Natur ist. Setzt man $\frac{d\xi}{dz} = z \,.\, \cos z$, so ist mit den früheren Bezeichnungen

$$\varphi''\xi = \frac{1}{z\cos^3 z} = \pm \frac{(1-\varphi'\xi^2)^{3/2}}{\operatorname{arctg}\varphi'\xi},$$

$$\text{also } \eta = + \int \frac{u\,(\operatorname{arctg} u)\, du}{(1+u^2)^{3/2}} = \pm \frac{u - (\operatorname{arctg} u)}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\text{und } \xi = + \int \frac{(\operatorname{arctg} u)\, du}{(1+u^2)^{3/2}} = \pm \frac{1 + u \,.\, (\operatorname{arctg} u)}{\sqrt{1+u^2}},$$

wenn die willkührlichen Constanten gleich Null angenommen werden.

Daraus zieht man $u\eta + \xi = \pm\sqrt{1+u^2}$, $u = \frac{-\eta\xi \pm \sqrt{\eta^2+\xi^2-1}}{\eta^2-1}$

ferner $u\xi - \eta = (u\eta + \xi)\operatorname{arctg} u$, also endlich

$$\mp\sqrt{\eta^2+\xi^2-1} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{-\eta\xi \pm \sqrt{\eta^2+\xi^2-1}}{\eta^2-1}\right),$$

wo die doppelten Zeichen einander entsprechen.

Schreibt man dem Obigen zufolge

$\eta = \pm(\sin z - z\cos z)$ und $\xi = \pm(\cos z + z \sin z)$,

so ist $\frac{d\eta}{dz} = \pm z \sin z$ und $\frac{d\xi}{dz} = \pm z\cos z$.

Fig. 7. Der aus mehreren (jenachdem man das obere oder untere Vorzeichen wählt und andererseits, jenachdem man $z$ positiv oder negativ nimmt) spiralenartigen Zügen bestehende Gang der Curve wird näher charakterisirt durch Beachtung einmal der Stellen, wo $\eta$, resp. $\xi$ Null werden, dann derjenigen, wo $\frac{d\eta}{dz}$, resp. $\frac{d\xi}{dz}$, gleich Null werden.

Man hat folgende zusammen gültige Werthe:

| $z$, | $\pm\eta$, | $\pm\xi$ | $z$, | $\pm\eta$, | $\pm\xi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | $\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $-1$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\pi$ | $\pi$ | $-1$ | $-\pi$ | $-\pi$ | $-1$ |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $-1$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | $-\frac{3\pi}{2}$ | 1 | $-\frac{3\pi}{2}$ |
| $2\pi$ | $-2\pi$ | 1 | $-2\pi$ | $2\pi$ | 1 |

u. s. f.

Für die vorliegende Substitution hat man

$$\int \sqrt{1+\varphi'\xi^2}\, e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi}\, d\xi = \pm \int z\, e^{-\frac{z}{n}}\, dz =$$

$$= \mp n z\, e^{-\frac{z}{n}} \mp n^2\, e^{-\frac{z}{n}},$$ mithin gilt für die Trajectorien, während man $Fn = 0$ voraussetzt, $\frac{x-\xi}{\cos z} - nz - n^2 = 0$

und $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$.

Die Durchschnittspunkte der Trajectorien mit der $\eta\xi$curve selbst sind bestimmt durch $z = -n$, so dass solche Punkte nur für negative Bögen $z$ exsistiren.

Durch Einführung der oben angegebenen Werthe für $\eta$ und $\xi$ erhält man $x = nz\cos z + n^2\cos z \pm \cos z + z\sin z$
und $y\cos z - x\sin z \pm z = 0$ oder
$y = \mp z\cos z \pm \sin z + nz\sin z + n^2\sin z$.

Man bemerkt die ebenfalls spiralenartige Gestalt der Trajectorien.

Zur näheren Charakterisirung dienen die Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dz} = n\cos z - nz\sin z - n^2\sin z + z\cos z$$

und $\frac{dy}{dz} = \pm z\,.\sin z + n\sin z + nz\cos z + n^2\cos z,$

welche zu Null werden durch

$$\operatorname{tg} z = \frac{n \pm z}{n(n+z)} \text{ und } \operatorname{tg} z = -\frac{n(n+z)}{n \pm z}.$$

Was eine einhüllende Curve der vorliegenden Trajectorien anbelangt, so ergibt die Differentiation der Gleichung der Trajectorien nach $n$ $\quad -z - 2n = 0 \qquad n = -\frac{z}{2}.$

Daran zeigt sich, dass allein diejenigen Abschnitte der Trajectorien, welche die Tangenten der $\eta\xi$curve mit negativem Bogen $z$ schneiden, eine einhüllende Curve besitzen. Man erinnere sich, dass es auch nur diese Stücke der Trajectorien waren, welche mit der $\eta\xi$curve einen Durchschnittspunkt gemeinsam hatten.

Als Gleichnngen der einhüllenden Curve gelten

$$x = +\cos z \pm z\sin z - \frac{z^2}{4}\cos z$$

und $\qquad y = +\sin z \mp z\cos z - \frac{z^2}{4}\sin z.$

Daraus erhält man

$$\frac{dx}{dz} = \pm z\cos z - \frac{z}{2}\cos z + \frac{z^2}{4}\sin z$$

und $\frac{dy}{dz} = \pm z\sin z - \frac{z}{2}\sin z - \frac{z^2}{4}\cos z,$

welche Werthe zu Null werden durch

$$\frac{z}{4}\operatorname{tg} z = 1/2 \mp 1 \quad \text{und} \quad \frac{z}{4}\operatorname{cotg} z = \pm 1 - 1/2\,.$$

§. 18. Vermittelst eines von dem seither angewandten durchaus abweichenden Verfahrens wird man ebenfalls zu Lösungen des in §. 3 erwähnten Integrals

$$\int \sqrt{1+\varphi'\xi^2}\,.\,e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi}\,d\xi \quad \text{gelangen.}$$

Der einfachste hier einschlägige Fall soll näher erörtert werden.

Die Form des genannten Integrals muntert zu dem Versuche auf, willkührlich den Ausdruck $(1 + \varphi'\xi^2)^{3/2} \cdot e^{-\frac{1}{n} \operatorname{arctg} \varphi'\xi}$ als eine Lösung des Integrals anzunehmen.

Die Differentiation dieses Ausdruckes liefert

$$(1 + \varphi'\xi^2)^{1/2} \cdot e^{-\frac{1}{n} \operatorname{arctg} \varphi'\xi} \left(3\,\varphi'\xi\,\varphi''\xi - \frac{\varphi''\xi}{n}\right).$$

Es würde somit die Annahme gerechtfertigt sein für eine derartige Function $\varphi\xi$, dass $3\varphi'\xi\,\varphi''\xi - \frac{\varphi''\xi}{n} = 1$ wäre. Aus dieser Bedingung wird man durch Anwendung desselben Verfahrens, wie im §. 3, eine neue $\eta\xi$curve gewinnen. Danach ist

$$\varphi''\xi = \frac{n}{3\,n\,\varphi'\xi - 1}, \quad \text{also}$$

$$\eta - c = \int \frac{u\,(3\,n\,u - 1)\,du}{n} \quad \text{und} \quad \xi - c_1 = \int \frac{(3\,n\,u - 1)\,du}{n},$$

oder $\eta - c = u^3 - \frac{u^2}{2n}$ und $\xi - c_1 = \frac{3u^2}{2} - \frac{u}{n}$.

Hieraus zieht man $u = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 6\,n^2\,(\xi - c_1)}}{3\,n}$, was der Kürze halber geschrieben werden möge $u = \frac{1 + v}{3n}$. Ferner ist nun $\eta - c = u^2\left(u - \frac{1}{2n}\right) = \frac{3\,v^2 + 2\,v^3 - 1}{54\,n^3}$

$$54\,n^3\,(\eta - c) + 1 - 3\,v^2 = 2\,v^3.$$

Wenn man diese Gleichung quadrirt und für $v$ seinen Werth einsetzt, so erhält man endlich

$$27\,n^3\,(\eta - c)^2 - 2\,(\eta - c) - 18\,n^2\,(\eta - c)\,(\xi - c_1) - n\,(\xi - c_1)^2 - 8\,n^3\,(\xi - c_1)^3 = 0$$

als Gleichung der ursprünglichen Curve.

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass im Gegensatze zu allen bisher behandelten $\eta\xi$curven die vorliegende $n$ als festen Parameter enthält.

Wenn man in der gegenwärtigen Gleichung den Constanten $c$ und $c_1$ irgend einen festen Werth beilegt, so wird dadurch nur über die Lage des Coordinatenanfangs eine Bestimmung getroffen, ohne dass die Richtung der Coordinatenaxen beeinflusst würde.

Setzt man beide Constanten gleich Null, so lautet die Gleichung $27\,n^3\,\eta^2 - 2\,\eta - 18\,n^2\,\eta\,\xi - n\,\xi^2 - 8\,n^3\,\xi^3 = 0$.

Fig. 8. Aus dem Werthe $\eta = \frac{1 + 9\,n^2\,\xi \pm (6\,n^2\,\xi + 1)^{3/2}}{27\,n^3}$ sieht man, dass für Werthe von $\xi$, die kleiner als $-\frac{1}{6\,n^2}$ sind, es kein reelles $\eta$ gibt, dass für $\xi = -\frac{1}{6\,n^2}$ der einzige Werth $\eta = -\frac{1}{54\,n^3}$ gilt, dass endlich für grössere $\xi$ stets zwei Werthe von $\eta$ vorhanden sind. Für $\xi = 0$ hat man $\eta = 0$ oder $\eta = \frac{2}{27\,n^3}$, während andererseits für $\eta = 0$ entweder $\xi = 0$ oder $\xi = -\frac{1}{8\,n^2}$ ist. Der Ausdruck $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1 \pm \sqrt{6\,n^2\,\xi + 1}}{3\,n}$ wird Null durch $\xi = 0$ für das untere Zeichen. Da $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \pm \frac{n}{\sqrt{6\,n^2\,\xi + 1}}$ in diesem Falle negativ ist, so ergibt sich, dass derjenige Theil der Curve, welcher durch das untere Vorzeichen in dem Ausdrucke für $\eta$ vorgestellt wird, das einzige Maximum der Curve für $\eta$ besitzt und zwar im Coordinatenanfang, wo dieser Theil der Curve die Abscissenaxe berührt.

Weil für denselben Theil der Curve sowohl $\eta$, als auch $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ stets negativ, das Product aus beiden Grössen also positiv ist, so wendet hier die Curve der Abscissenaxe fortwährend ihre convexe Seite zu. Was den durch das obere Vorzeichen in $\eta$ repräsentirten Theil der Curve anbelangt, so ist hier $\eta$ bis zu dem Punkte $\left\{\begin{array}{l}\eta = 0\\ \xi = -\frac{1}{8\,n^2}\end{array}\right.$ negativ, von da an positiv. Auf dem Wege der negativen $\eta$ wendet also dieser Theil seine concave Seite der Abscissenaxe zu, auf dem Wege der positiven $\eta$ seine convexe. Der durch $\eta = -\frac{1}{54\,n^3}$ $\xi = -\frac{1}{6\,n^2}$ bestimmte Punkt, von dem beide Theile der Curve ausgehen, ist also ein Rückkehrpunkt. Verlegt man in ihn den Coordinatenanfang, wozu also die obigen Constanten $c = \frac{1}{54\,n^3}$ und $c_1 = \frac{1}{6\,n^2}$ gesetzt werden müssen, so

erhält man die Gleichung der Curve in der einfachen Gestalt
$\left(\eta - \frac{\xi}{3n}\right)^2 = \frac{8}{27}\xi^3$.

§. 19. Für die Trajectorien der vorliegenden Curven gilt

$$\left.\begin{array}{l}(x-\xi)\sqrt{1+\varphi'\xi^2} + (\sqrt{1+\varphi'\xi^2})^3 \\ e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi}\end{array}\right\} = Fn$$

und $y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi)$.

Bei der Annahme $Fn = 0$ wird die erste Gleichung zu
$x - \xi + 1 + \varphi'\xi^2 = 0$.

Macht man wieder die frühere Voraussetzung $c = c_1 = 0$ und benutzt nochmals die oben angewandte Abkürzung
$\pm\sqrt{1+6n^2\xi} = v$, so ist also $\xi = \frac{v^2-1}{6n^2}$,

$\eta = \frac{3v^2+2v^3-1}{54n^3}$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1+v}{3n}$.

Mithin wird aus der zuletzt aufgestellten Gleichung
$x - \frac{v^2-1}{6n^2} + 1 + \left(\frac{1+v}{3n}\right)^2 = 0$, wodurch man zu
$v = 2 \pm 3\sqrt{2n^2x + 2n^2 + 1}$ gelangt. Die Gleichung
$y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x-\xi)$ wird mit Hülfe der angegebenen Werthe zu

$$y - \frac{3v^2+2v^3-1}{54n^3} = \frac{1+v}{3n}\left(x - \frac{v^2-1}{6n^2}\right) \text{ oder}$$

$$v^3 - v(3 + 18n^2x) = 18n^2x - 54n^3y + 2.$$

Setzt man hier den gefundenen Ausdruck für $v$ ein, so erhält man als Resultat der Rechnung folgende Gleichung zweiten Grades zwischen $x$ und $y$

$$n^3y^2 + 2n^2xy + nx^2 + 2(2n^2+1)y - 2n^3x - n(2n^2+1) = 0.$$

Fig. 8. Der Umstand, dass die 3 ersten Glieder zusammengenommen ein Quadrat bilden, zeigt sofort, dass man es mit einer Parabel zu thun habe. Aus den Coëfficienten der Gleichung berechnet man für den Schneidepunkt der Parabel die Coordinaten $x = -1$ und $y = 0$. Verlegt man in ihn den Coordinatenanfang und dreht alsdann die positive Abscissenaxe nach der positiven Ordinatenaxe hin um einen Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2} + \lambda$, wo $\lambda$, wie

immer, den Schneidewinkel bezeichnet, so dass man hat $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{n}$, so lautet die Gleichung der Parabel auf dieses neue System bezogen $y^2 = -\frac{2\sqrt{1+n^2}}{n} x$, wodurch ihre Lage völlig charakterisirt ist.

Für jedes $n$ hat man dem Gesagten zufolge eine bestimmte $\eta\xi$curve und eine bestimmte zugehörige Parabel als Trajectorie.

Es ist leicht zu übersehen, wie man auf dem zuletzt eingeschlagenen Wege weiter fortfahren kann, indem man

$(1+\varphi'\xi^2)^{1/2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi}$ oder

$(1+\varphi'\xi^2)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi}$ oder

$(1+\varphi'\xi^2)^{5/2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi}$ u. s. f. als Lösungen des Integrals

$\int \sqrt{1+\varphi'\xi^2} \cdot e^{-\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\varphi'\xi} d\xi$ annimmt und untersucht, welche $\eta\xi$curven hierdurch vorausgesetzt sind und welche Trajectorien dazu gehören.

Verbesserungen.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Seite 5 | Zeile 10 | v. o. | lies | $(x-\xi)\sqrt{1+\varphi'\xi^2}$ | statt | $(x-\xi\sqrt{\ })$ |
| — | — 15 | — | — | $\sqrt{1+\varphi'\xi^2}$ | — | $\sqrt{1+\varphi'\xi^2}$ |

*Die ursprünglichen η ξ Curven sind schwarz, die Trajectorien roth, die einhüllenden Curven blau gezeichnet.*

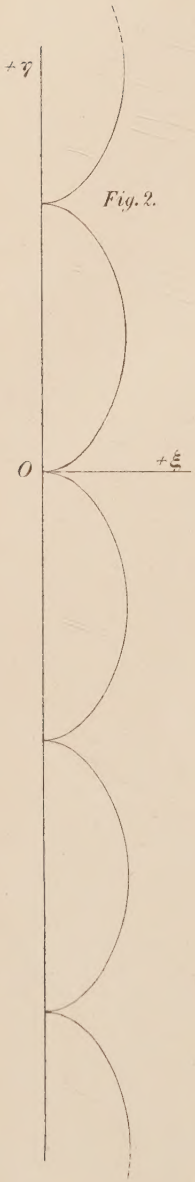
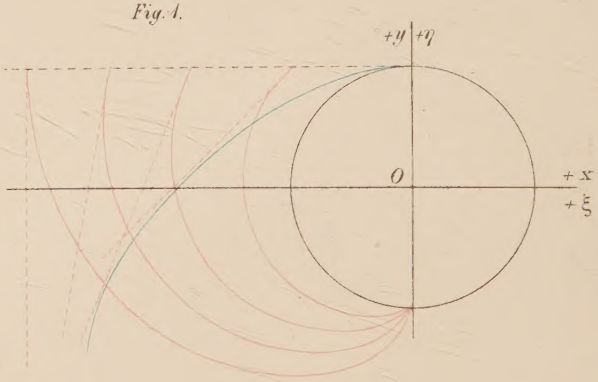



*Fig. 2.*

*Fig. 1.*



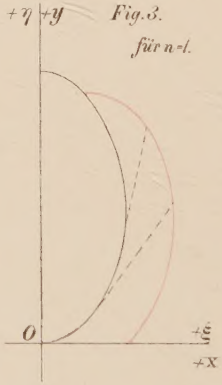




*Fig. 3.*
*für n=1.*

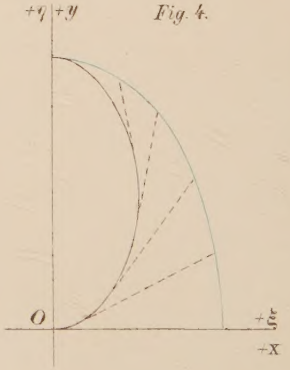



*Fig. 4.*

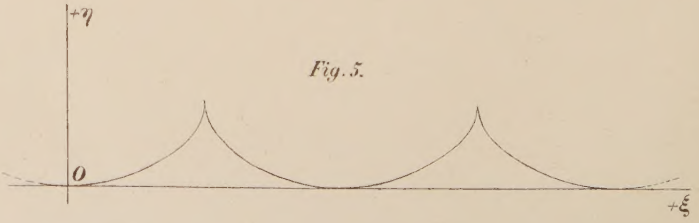



*Fig. 5.*

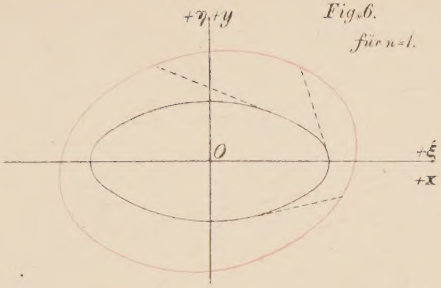



Fig. 6.
für n=1.

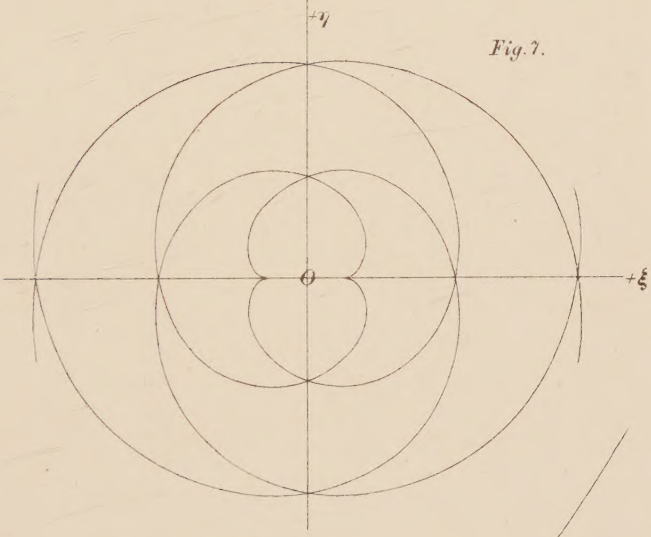



Fig. 7.

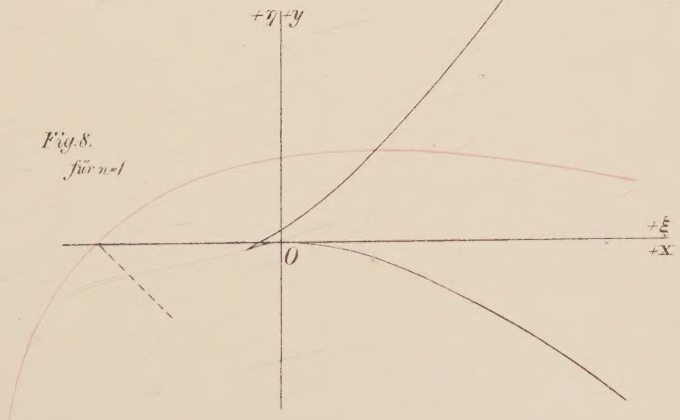



Fig. 8.
für n=1